

1 次元時間非整数階微分リチャーズ式の数値解析 Numerical analyses of one-dimensional time-fractional Richards equation

○泉 智揮*・村上勝亮**・山下尚之*

○Tomoki IZUMI, Shosuke MURAKAMI and Naoyuki YAMASHITA

1. はじめに

土壌水分移動の解析に広く用いられるリチャーズ式は、土壌中の水分移動を拡散現象としてモデル化する。しかしながら、自然条件の土壌は非常に不均質であり、このことに起因する異常拡散と呼ばれる通常の拡散とは異なる現象が起こりうる。したがって、既往のリチャーズ式ではこの異常拡散を表現できない。近年、不均質媒体中の異常拡散のモデル化に対して、非整数階微分を用いたアプローチが研究されている(例えば[1])。そこで本研究では、不均質な土壌中の水分移動を対象に、リチャーズ式の時間微分に非整数階微分を適用した1次元解析モデルを構築する。

2. 1次元リチャーズ式の時間非整数階微分モデル

2.1 時間非整数階微分リチャーズ式

鉛直1次元リチャーズ式は次式のように表さる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (1)$$

ここで、 θ は体積含水率、 ψ は圧力水頭、 t は時間、 z は鉛直上向きを正とする空間座標、 $K(\theta)$ は不飽和透水係数である。(1)式の時間微分にカプトーの定義による非整数階微分を適用すると次式の時間非整数階微分リチャーズ式が得られる。

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial \tau} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right), \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2)$$

ここで、 α は微分階数、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

2.2 土壌水理特性

土壌水分特性曲線は、van Genuchten [2]のモデルを採用する。

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + |\alpha_w \psi|^n \right]^{-m} \quad (3)$$

ここで、 S_e は有効飽和度、 θ_r は残留体積含水率、 θ_s は飽和体積含水率(間隙率)、 α_w 、 m 、 n は形状パラメータであり、 $m = 1 - 1/n$ の関係にある。

不飽和透水係数 K は、飽和透水係数 K_s と相対透水係数 K_r の積で表され ($K = K_s K_r$)、相対透水係数には以下の van Genuchten-Mualem 型のモデルを採用する。

$$K_r = S_e^{1/2} \left(1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right)^2 \quad (4)$$

2.3 離散化手法

上記の(2)式に対して差分法(時間方向に前進差分、空間方向に中央差分)を用いて離散化し、初期条件ならびに境界条件を与えて求解する。

3. 数値解析

3.1 対象地と観測の概要

本研究では、愛媛県宇和島市吉田町の急傾斜柑橘園地を対象とする(図1)。対象地は、法花津湾の北東にある南西向きの斜面であり、平均勾配はおおよそ 32° である。図中の○印で示した地点において体積含水率を測定している。測定には、ADR 土壌水分計(UIZ-ML3-LR, UIZIN)を3台用いて、それぞれ G.L.-10cm, -50cm, -100cm に埋設し10分間隔で時系列データを収集してい

* 愛媛大学大学院農学研究科, Graduate School of Agriculture, Ehime University

** 愛媛大学農学部, Faculty of Agriculture, Ehime University

キーワード: リチャーズ式, 非整数階微分, 数値解析

る．また，降雨量データは，愛媛県農林水産研究所果樹研究センターみかん研究所から提供を受けた．

3.2 解析領域と解析条件

解析領域は，G.L.-10cm～-100cm までの90cm の領域とし，この領域を 1cm 間隔で91 節点 90 要素に分割する．G.L.-10cm と-100cm の実測値をディリクレ境界条件として与え，G.L.-50cm の実測値を解析結果の再現性の検証に用いる．ここでは，降雨後の脱水過程を対象として，計算期間を2021年5月5日～5月7日のおよそ2日間，計算のタイムステップを1秒とする．また，解析に用いるパラメータは表1に示すとおりである．微分階数は1.0～0.2 階として解析結果を比較する．

3.3 解析結果

図2に1.0階，0.8階，0.6階，0.4階，0.2階微分の結果を示す．図より微分階数が小さいほど体積含水率が緩やかに減少することが分かる．これは，非整数階微分によって現れる畳み込み積分の効果により，微分階数が小さくなるほど体積含水率の履歴効果が大きくなるためと考えられる．また，表2にそれぞれ微分階数に対する解析結果と実測値との差(RMSE)示す．表2から，0.6階微分の解析結果が最も実測値を再現していることが分かる．

4. まとめ

非整数階微分に基づく1次元リチャーズ式の解析モデルを構築した．その結果，非整数階微分を用いることでより実測値を再現できる解析モデルになることが分かった．

謝辞

本研究成果は科研費19KK0167によるものである．

引用文献

[1] 島本憲夫(2013): 時間非整数階微分に基づいた異常拡散モデリング, 数理解析研究所講究録, 1847, pp.116-128. [2] van Genuchten (1980): A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5), pp.892-898.



図1：対象地と観測地点

表1：解析に用いたパラメータ

パラメータ	値
θ_s	0.550
θ_r	0.0157
α_w (/m), (GL-10～-30cm)	12.0
α_w (/m), (GL-31～-70cm)	8.0
α_w (/m), (GL-71～-100cm)	5.0
n	2.0
K_s (m/s)	6.5×10^{-3}

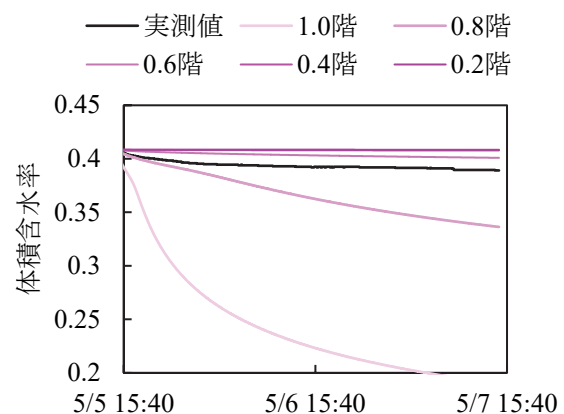


図2：解析結果

表2：体積含水率の誤差(RMSE)

微分階数 α_w	RMSE
1.0	0.1578
0.8	0.0322
0.6	0.0099
0.4	0.0145
0.2	0.0151